數學傳播 49卷4期, pp. 73-93

離散世界中的可積之美
—從可積系統看幾何與算法的交響

伍靜蕊 · 李春霞 · 孫建青 · 胡星標

摘要:

差分對稱梭經緯, 離散結構組合中。
户田方程蘊玄機, 多維相容算法通。
守恆不變溯天地, 可積妙境幾何融。
代數曲線藏日月, 孤子密鑰代數宗。

本文從幾何與算法的獨特視角切入, 通過一系列精選案例, 將抽象的數學概念與直觀的幾何圖形相結合, 並藉助巧妙的算法構造, 揭示了離散可積系統深層的數學結構。通過多角度的分析與闡釋, 展現了離散世界的可積之美。

關鍵字: 梅涅勞斯 (Menelaus) 定理、離散 KP (Kadomtsev-Petviashvili) 系統、QR 算法、户田 (Toda) 方程、海倫 (Heron) 三角、坎迪 (Candy) 定理、彭賽列 (Poncelet) 定理、廣田 (Hirota) 離散單擺。

1. 引言

在數學的浩瀚星河中, “可積” 一詞如同一顆若隱若現的星辰。初識它時, 我們或許是在常微分方程的課堂上, 看到一類特殊動力系統展現出豐富的守恆律、顯式的解析解以及優美的對稱結構, 使得原本可能混沌的行爲呈現出高度有序的演化軌跡。這種“可積性” , 不僅昭示瞭解的存在性, 更深刻揭示了系統內在的幾何結構與代數本質。

若再向前一步, 踏入現代數學的疆域, “可積系統” 的面貌愈發神秘而絢爛。正如英國數學家奈傑爾 · 希欽 (Nigel Hitchin) [1] 所言, 定義可積系統如同定義爵士樂—“爵士樂之父” 路易斯·阿姆斯特朗 (Louis Armstrong) 曾戲謔道: “如果你問了, 那你就永遠也無法知道!” 但若執意探尋其本質, 或許可以捕捉到幾個耀眼的特徵: 守恆律的豐饒、代數幾何語言的悄然降臨, 以及顯式解在方程汪洋中如燈塔般的矗立。

而在離散世界中, 可積性的魅力更加純粹。格點上的演化規則、離散幾何中的相容條件、算法迭代中的精確遞推關係, 它們在數值、圖形與結構之間編織出精妙的聯繫, 像交響樂章中的對位法, 將幾何的直觀與代數的嚴謹熔鑄爲一。在這裡, 我們發現: 即使沒有光滑的微分方程, 也能通過差分規則捕捉不變量的存在、週期性的迴響和幾何結構的映射。

本文從幾何與算法的獨特視角切入, 通過一系列精心挑選的案例, 將抽象的數學概念與直觀的幾何圖形相結合, 並藉助巧妙的算法構造, 揭示了離散可積系統背後的深層數學結構。這些例子跨越古典幾何與現代理論, 融合數論、動力系統與數值分析的思想, 共同構建起一幅關於“不變性” 的數學圖景。

在幾何維度, 我們從古希臘的梅涅勞斯 (Menelaus) 定理出發, 探討其在離散 KP (Kadomtsev-Petviashvili) 系統中的應用。這個判定三點共線的經典幾何命題, 在離散幾何框架下展現出新的生命力—它與離散施瓦茨 (Schwarzian) KP 方程、離散形變 KP 方程和離散 KP 方程建立了深刻聯繫。通過差分幾何的視角, 我們觀察到幾何約束如何自然轉化爲差分方程的演化規則, 這種轉化機制已成爲現代可積系統研究的重要方法論。

在數論領域, 海倫 (Heron) 三角形以其邊長與面積均爲有理數的特性, 成爲數與幾何關係的典範案例。而索莫斯 (Somos) 序列通過非線性遞推保持整數性的現象, 則揭示了數列結構中隱藏的深層代數性質。這兩個看似獨立的研究對象在 QRT 映射的動力學框架下產生交匯: 在守恆量約束下, 它們共同展現出週期性演化特徵—這正是離散可積系統的核心標誌。

數值算法視角下, QR 算法與戶田 (Toda) 方程的關聯、算術幾何平均的迭代結構、帕德逼近 (Padé Approximation)、坎迪 (Candy) 定理與交叉規則 (Cross Rule) 的對應關係, 共同印證了可積性在計算方法中的結構性作用。這種作用既體現在方程的守恆結構中, 也滲透於數值方法的設計邏輯, 成爲連接基礎數學與工程應用的橋樑。

當聚焦幾何閉合現象時, 彭賽列 (Poncelet) 閉合定理通過雅可比 (Jacobi) 橢圓函數的解析表達, 揭示了多邊形閉合路徑與週期運動的統一性。而在物理領域, 日本數學家廣田良吾 (Ryogo Hirota) 提出的離散單擺模型進一步將閉合性引入動力系統, 構建起跨越時空的對稱映射。這些案例共同指向離散可積性的本質特徵: 在離散格點框架下, 數學結構依然保持著深層的統一性。

這些跨越數學分支的案例, 最終匯聚成關於“離散可積性”的全景圖景: 它既是幾何閉合性的解析表達, 也是數列整數性的深層密碼, 更是數值算法的內在靈魂。當我們循著這些線索追本溯源, 終將觸及可積系統最本質的特徵—在看似離散的格點世界裡, 數學的統一性依然閃耀著永恆的光芒。

2. 古典幾何與離散可積系統的交響: 梅涅勞斯定理與離散KP 系統

在離散可積系統的研究中, 古典幾何的基本定理正煥發出新的生命力, 奏響離散可積系統中的動人旋律。以梅涅勞斯定理爲例, 這一經典定理在初等數學中被廣泛應用, 其簡潔而優雅的

數學形式令人讚歎。它描述了三角形邊上共線點的比例關係, 而這種比例關係本質上是一種幾何約束。正是這種約束, 爲離散可積系統的構造提供了重要的理論基礎, 深刻揭示了離散世界中幾何與動力學的內在聯繫。典型的例子包括從梅涅勞斯定理到離散施瓦茨 KP 方程、離散形變 KP 方程和離散 KP 方程, 從推廣的梅涅勞斯定理到離散達布 (Darboux) 系統等[2, 3]。這些定理不僅在數學上具有深刻的理論意義, 更爲離散可積系統的研究提供了清晰的幾何視角。這種從平面幾何到離散可積系統的跨越, 不僅彰顯了經典數學定理的持久魅力, 展現了離散世界中可積之美的豐富內涵, 也揭示了現代數學中不同領域之間的內在統一性。通過幾何約束的視角, 我們得以用一種更加直觀和優雅的方式理解離散可積系統的本質, 同時也爲相關領域的研究開闢了新的思路和方法。

2.1. 梅涅勞斯: 古希臘數學與天文學的先驅

梅涅勞斯是公元 1 世紀古希臘數學家兼天文學家, 活躍於羅馬帝國初期的亞歷山大城 (今埃及境內)。作爲希臘化時代的學術中心, 亞歷山大城擁有著名的亞歷山大圖書館和活躍的學者群體, 數學研究主要集中在幾何學、天文學和實用科學領域。梅涅勞斯被帕普斯 (Pappus) 和普羅克洛斯 (Proclus) 稱爲“亞歷山大的梅涅勞斯 (Menelaus of Alexandria)”, 是古代幾何學與球面三角學的先驅之一, 其研究對數學和天文學的發展產生了深遠影響。

梅涅勞斯以對球面幾何的研究聞名, 其代表作《球面學》首次系統地提出了球面三角形的概念, 並詳細闡述了球面三角形的性質, 推導了球面三角形的邊角關係定理, 即梅涅勞斯定理的球面版本。該定理利用純幾何的字母圖解來計算球面三角形或球體上的距離, 這一成就爲天文學的研究 (例如計算行星軌跡) 提供了重要的數學工具。爲了紀念他對天文學的貢獻, 月球上有一座以梅涅勞斯命名的隕石坑。此外, 作爲特例, 平面幾何中的梅涅勞斯定理在幾何證明和競賽數學中有著廣泛應用, 是判斷三點共線的關鍵工具。

遺憾的是, 梅涅勞斯的著作大多已散佚。即使是最重要的著作《球面幾何》, 也只是以阿拉伯語譯本的形式倖存下來。該書包含對球面幾何的系統論述, 被視爲中世紀伊斯蘭科學的重要來源。《球面幾何》通過阿拉伯學者傳入歐洲, 影響了中世紀數學家如納西爾丁·圖西 (Nasir al-Din al-Tusi)。文藝復興時期, 歐洲學者重新發現其價值, 將其納入近代幾何學體系。據記載, 他還著有六本關於圓和絃的幾何學書籍, 但均已失傳, 僅在後期學者的作品引用中有所體現。由於著作散佚, 梅涅勞斯的貢獻長期被低估。直到 19 世紀, 學者通過阿拉伯譯本重新發掘其工作, 才確認他在數學史上的重要地位。

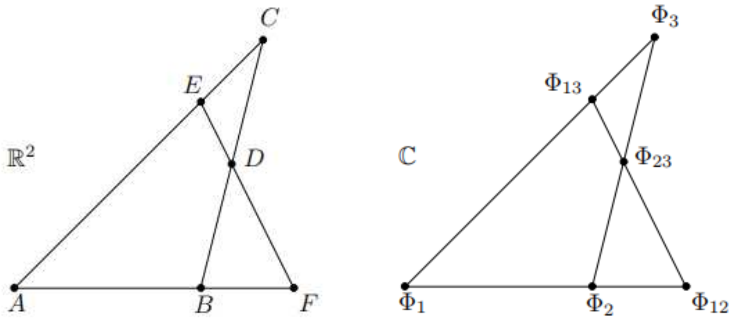
梅涅勞斯是古代科學史上承前啓後的關鍵人物。他的著作成爲東西方科學交流的紐帶, 體現了古希臘科學在伊斯蘭黃金時代的延續。梅涅勞斯定理作爲連接平面幾何與球面幾何的橋樑, 其比例關係思想影響了射影幾何的發展。不僅如此, 該定理至今仍是幾何學教育的核心內容。儘管梅涅勞斯的生平細節模糊, 但他通過數學與天文學的成就, 爲人類理解宇宙的幾何結構留下

了不可磨滅的印記。

2.2. 梅涅勞斯定理: 幾何學中的璀璨明珠

設 D, E, F 分別是 $\triangle ABC$ 的三條邊 BC, CA, AB 或其延長線上的點 (見圖 1(a)), 若將線段 AF、FB、BD、DC、CE、EA 視爲有向長度 (即帶有正負符號的代數長度, 符號由點的相對位置決定), 則梅涅勞斯定理 [4] 可表述爲: D, E, F 三點共線的充要條件是

$$\frac{AF}{FB}\,\frac{BD}{DC}\,\frac{CE}{EA}=-1. \tag{1}$$



(a) (b)

圖 1: 梅涅勞斯定理圖示

考慮一個平面多邊形 $(P_1,\ldots,P_n)$, 其中 $n\geq 3$, $n\in N^+$。設 L 爲與該多邊形共面的直線, 記 Q_m 爲直線 L 與邊 (P_m,P_{m+1}) 或其延長線的交點 $(m=1,\ldots,n)$, 則有向長度 P_mQ_m 和 Q_mP_{m+1} 滿足代數關係

$$\prod_{m=1}^{n}\frac{P_mQ_m}{Q_mP_{m+1}}=(-1)^n, \tag{2}$$

其中 $P_{n+1}=P_1$, 這正是平面幾何中的梅涅勞斯定理在多邊形上的推廣形式 [5, 6]。顯然, 當 $n=3$, 即三角形的情形下, 我們可以得到經典的梅涅勞斯定理。梅涅勞斯定理還存在其它推廣形式, 這些定理不僅在幾何學中具有廣泛的應用價值, 還在跨學科領域中展現出強大的適用性。

2.3. 梅涅勞斯定理與複數的多重比

作爲交比的推廣, $2n$ 個複數的多重比 (Multi-Ratios) 定義爲

$$\mathsf{M}_{2n}=\mathsf{M}(P_1,\ldots,P_{2n})=\frac{(P_1-P_2)(P_3-P_4)\cdots(P_{2n-1}-P_{2n})}{(P_2-P_3)(P_4-P_5)\cdots(P_{2n}-P_1)}, \tag{3}$$

其在作用於複平面的莫比烏斯 (Möbius) 變換群下是不變的。很自然地, 我們可以將以實數表示的平面多邊形的頂點視作複平面上的複數, 從而建立梅涅勞斯定理與多重比之間的聯繫。基

於這種思想, 多點關係 $\mathsf{M}_{2n}=(-1)^n$ 對應於梅涅勞斯定理的推廣形式 (2):

$$\prod_{m=1}^{n}\frac{P_{2m-1}P_{2m}}{P_{2m}P_{2m+1}}=(-1)^n,$$

其中 $P_{2n+1}=P_1$. 特別地, 將圖 1(a) 中的點 $A,\ldots,F$ 用圖 1(b) 中的複數標記如下:

$$A=\Phi_1,\quad B=\Phi_2,\quad C=\Phi_3,\quad D=\Phi_{23},\quad E=\Phi_{13},\quad F=\Phi_{12}.$$

由於圖中三組點 (A,B,F), (B,D,C) 和 (A,E,C) 分別共線, 下述比值

$$\alpha\triangleq\frac{\Phi_{12}-\Phi_1}{\Phi_{12}-\Phi_2},\qquad \beta\triangleq\frac{\Phi_{23}-\Phi_2}{\Phi_{23}-\Phi_3},\qquad \gamma\triangleq\frac{\Phi_{13}-\Phi_3}{\Phi_{13}-\Phi_1}\tag{4}$$

爲實數且有

$$\alpha=-\frac{AF}{FB},\qquad \beta=-\frac{BD}{DC},\qquad \gamma=-\frac{CE}{EA}.$$

此時, 梅涅勞斯定理公式 (1) 轉化爲

$$\alpha\beta\gamma=1,\tag{5}$$

其在多重比的定義下等價於六點關係

$$M(\Phi_1,\Phi_{12},\Phi_2,\Phi_{23},\Phi_3,\Phi_{13})=\frac{\Phi_1-\Phi_{12}}{\Phi_{12}-\Phi_2}\,\frac{\Phi_2-\Phi_{23}}{\Phi_{23}-\Phi_3}\,\frac{\Phi_3-\Phi_{13}}{\Phi_{13}-\Phi_1}=-1.\tag{6}$$

在可積系統的研究中, 多重比的幾何重要性近年來已被多位學者所揭示。

2.4. 離散KP 系統: 梅涅勞斯定理在離散世界的動力學演繹

爲簡便起見, 本節中我們將採用下述簡略記號表示自變量 $n_i\,(i=1,2,3)$ 的函數:

$$g\triangleq g(n_1,n_2,n_3),\quad g_1\triangleq g(n_1+1,n_2,n_3),\quad g_{23}\triangleq g(n_1,n_2+1,n_3+1).$$

現將 Φ 看作映射

$$\Phi:\ \mathbb{Z}^3\to\mathbb{C}.\tag{7}$$

根據上述記號, Φ 的下標可理解爲相應格點上的位移。一方面, 定義 (4) 可以看作是 Φ_1, Φ_{12}, Φ_2, Φ_{23}, Φ_3, Φ_{13} 的線性方程, 其中參數 α,β,γ 爲方程係數:

$$\Phi_{12}-\Phi_1=\alpha(\Phi_{12}-\Phi_2),\ \Phi_{23}-\Phi_2=\beta(\Phi_{23}-\Phi_3),\ \Phi_{13}-\Phi_3=\gamma(\Phi_{13}-\Phi_1),\tag{8}$$

則梅涅勞斯定理對應於方程

$$\frac{\Phi_1-\Phi_{12}}{\Phi_{12}-\Phi_2}\,\frac{\Phi_2-\Phi_{23}}{\Phi_{23}-\Phi_3}\,\frac{\Phi_3-\Phi_{13}}{\Phi_{13}-\Phi_1}=-1.\tag{9}$$

另一方面, 我們可以將 (8) 看作拉克斯 (Lax) 對, Φ 爲特徵函數, 則由 (8) 的相容性條件不難證明

$$\alpha\beta\gamma=1,\quad \alpha_3\beta_1\gamma_2=1,\quad (\alpha_3\beta_1-1)(\alpha-1)=(\alpha\beta-1)(\alpha_3-1). \tag{10}$$

事實上, 將 (8) 進行平移, 可得

$$\Phi_{123}-\Phi_{13}=\alpha_3(\Phi_{123}-\Phi_{23}),\ \Phi_{123}-\Phi_{12}=\beta_1(\Phi_{123}-\Phi_{13}),\ \Phi_{123}-\Phi_{23}=\gamma_2(\Phi_{123}-\Phi_{12}). \tag{11}$$

這顯然表明 $\alpha_3\beta_1\gamma_2=1$. 進一步, 將 (8) 改寫爲

$$\Phi_{12}=\frac{1}{1-\alpha}(\Phi_1-\alpha\Phi_2),\quad \Phi_{23}=\frac{1}{1-\beta}(\Phi_2-\beta\Phi_3),\quad \Phi_{13}=\frac{1}{1-\gamma}(\Phi_3-\gamma\Phi_1) \tag{12}$$

並代入 (11), 注意到三種方式得到的 Φ_{123} 應相等, 通過比較 Φ_1,Φ_2,Φ_3 的係數便可得到 (10) 的第一和第三個方程。方程 (9) 或 (10) 被稱爲離散施瓦茨 KP 方程, 二者通過變換 (8) 相聯繫。不僅如此, (10) 的前兩個方程還啓發我們將 α,β,γ 參數化爲

$$\alpha=\frac{\phi_1}{\phi_2},\quad \beta=\frac{\phi_2}{\phi_3},\quad \gamma=\frac{\phi_3}{\phi_1}, \tag{13}$$

從而離散施瓦茨 KP 方程 (10) 轉化爲離散形變 KP 方程

$$\frac{\phi_{13}-\phi_{12}}{\phi_1}+\frac{\phi_{12}-\phi_{23}}{\phi_2}+\frac{\phi_{23}-\phi_{13}}{\phi_3}=0. \tag{14}$$

考慮譜問題

$$\phi_1-\phi_2=\lambda u\phi,\quad \phi_2-\phi_3=\lambda v\phi,\quad \phi_3-\phi_1=\lambda w\phi, \tag{15}$$

其中 λ 爲譜參數。直接將 (15) 中的方程相加, 可得到

$$u+v+w=0. \tag{16}$$

將 (15) 先進行平移

$$\phi_{13}-\phi_{23}=\lambda u_3\phi_3,\quad \phi_{12}-\phi_{13}=\lambda v_1\phi_1,\quad \phi_{23}-\phi_{12}=\lambda w_2\phi_2, \tag{17}$$

相加後可得

$$u_3\phi_3+v_1\phi_1+w_2\phi_2=0. \tag{18}$$

通過 (15) 可將 (18) 轉化爲

$$(u_3+v_1+w_2)\phi_1+\lambda(u_3w-uw_2)\phi=0,$$

從而

$$u_3 + v_1 + w_2 = 0, \quad u_3 w = u w_2. \tag{19}$$

方程 (16) 和 (19) 不是別的, 正是離散 KP 方程。因此, 譜問題 (15) 構成離散 KP 方程的拉克斯對。反過來, 根據方程 (17) 和 (19) 還可以得到離散形變 KP 方程 (14)

$$\frac{\phi_{13} - \phi_{12}}{\phi_1} + \frac{\phi_{12} - \phi_{23}}{\phi_2} + \frac{\phi_{23} - \phi_{13}}{\phi_3} = -\lambda(v_1 + w_2 + u_3) = 0.$$

由此可見, 梅涅勞斯定理與離散 KP 系統密切相關。

古典幾何與離散可積系統之間的聯繫在此例中已可見一斑。此外, 推廣的梅涅勞斯定理與離散達布系統, 卡諾 (Carnot) 定理與離散 CKP 方程也存在緊密的聯繫。這些實例揭示了離散可積系統與平面幾何基本定理之間的淵源, 展現了離散世界中獨特的可積之美, 爲經典幾何定理注入了新的活力, 同時也開闢了幾何與離散可積系統交叉研究的新領域。

3. 幾何、數列與守恆: 離散可積系統的代數之舞

在幾何中, 我們常常關心一個簡單的問題: 一個圖形是否具有某種特殊性質? 比如, 一個三角形的邊長和面積能否同時是有理數? 這看似平凡的疑問, 卻引出了一個奇妙的對象—海倫三角形 [7]。它不僅滿足邊長爲有理數的條件, 連面積也精確地落在有理數範圍內, 彷彿數字與形狀在這裡達成了一種和諧的默契。更令人驚訝的是, 這類三角形並不是孤立存在的。通過索莫斯序列— 一種由非線性遞推關係生成的整數序列, 我們可以構造出無限多個這樣的海倫三角形。這種從數列到幾何的聯繫, 揭示了離散數學中隱藏的深層結構。而當我們深入挖掘索莫斯序列的動力學本質時, 一個更深層次的數學對象浮出水面—QRT 映射。這是一種具有守恆量的雙有理變換, 它的演化軌跡被嚴格限制在一條代數曲線上, 展現出離散系統中罕見的對稱與秩序。

從靜態的幾何構造出發, 經過數列的遞推生成, 最終抵達動力系統的守恆律, 這條思維脈絡描繪出一幅關於“不變性” 的數學圖景。它告訴我們, 在看似跳躍、離散的世界裡, 依然存在著類似連續系統中的結構與美感。這正是離散可積系統最迷人的地方, 也是我們探索“代數之舞”的起點。

3.1. 海倫三角形: 幾何中的整數和諧

海倫三角形所蘊含的數學奧秘, 折射出東西方文明對幾何真理的殊途同歸。在這類神奇三角形中, 邊長 a, b, c 與面積 Δ 均呈現爲精確的有理數, 其存在完美平衡了幾何的嚴謹與數字的和諧。以經典的 3, 4, 5 三角形爲例, 其邊長爲簡單整數, 面積精確爲 6—這不僅爲古代土地丈量提供便利, 更成爲畢達哥拉斯學派研究數形關係的基石。公元 62 年, 古希臘數學家亞歷山

大港的海倫在《測地術》中系統闡述了著名的三邊求積公式:

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

其中 $s = \frac{a+b+c}{2}$. 耐人尋味的是, 中國南宋末年數學家秦九韶在《數書九章》中記載道: "問沙田一段, 有三斜, 其小斜一十三里, 中斜一十四里, 大斜一十五里, 裡法三百步, 欲知爲田幾何?" 答曰: "三百十五頃。" 其術文是:"以小斜冪並大斜冪, 減中斜冪, 餘半之, 自乘於上; 以小斜冪乘大斜冪, 減上, 餘四約之, 爲實, 一爲從隅, 開平方, 得積。" 若以大斜記爲 a, 中斜記爲 b, 小斜記爲 c, 秦九韶的方法相當於下面的一般公式:

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2\right]}, \quad a \geq b \geq c.$$

由於任意 n 邊形均可分割爲 $n-2$ 個三角形, 海倫公式可推廣爲求多邊形面積的有效方法。在土地測量等實際應用中, 該方法無需直接測量三角形的高—只需測定各邊長度, 即可直接計算出面積, 實現賦稅公平分配。

耐人尋味的是, 這類具有整數邊與有理面積的三角形不僅在古代測量中扮演重要角色, 也啓發了後世對"整數幾何" 與"代數結構" 的深層探索。事實上, 海倫公式的簡潔背後, 隱藏著一種更深層次的數學結構—它不僅是靜態幾何的計算工具, 更爲後續動態遞推與守恆律的建立提供了靈感來源。

3.2. 索莫斯序列: 非線性遞推的整數奇蹟

如果說海倫三角形是幾何的謎題, 那麼索莫斯序列則是數論的魔法。這組由非線性遞推生成的整數序列, 看似隨機卻蘊含著驚人的規律性, 其背後正是離散可積系統的影子。

索莫斯序列最早由邁克爾・索莫斯 (Michael Somos) 在研究橢圓函數的組合性質時提出。它不同於常見的線性遞推數列, 而是依賴於高階的二次遞推關係, 使得每一步計算都涉及多個前項的乘積組合。以著名的 Somos-5 序列爲例:

$$S_{n+5}S_n = S_{n+4}S_{n+1} + S_{n+3}S_{n+2}, \quad n \geq 1. \tag{20}$$

如果給定初始值 $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = 1$, 那麼我們得到一個 Somos-5 序列

$$1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 5, 11, 37, 83, 274, 1217, 6161, 22833, 165713, \ldots$$

乍看之下, 這個序列似乎毫無規律, 但事實上每一項都保持爲整數—這一點令人驚訝: 因爲每次迭代都需要將一個複雜表達式除以前一項, 通常難以保證結果仍是整數。然而, 這種"奇蹟" 竟然持續發生, 揭示了該序列內在的深層結構。

更神奇的是, 根據文獻 [8] 中的定理 1, 兩個交織的 Somos-5 序列:

$$(S_n): 1, 1, 2, 3, 5, 11, 37, 83, 274, \ldots,$$
$$(T_n): 1, 1, 1, 1, 7, 8, 1, 57, 391, \ldots,$$

竟能編碼一類海倫三角形的無限族, 其邊長與面積分別爲:

$$\begin{aligned} a &= \left|S_{n+1}S_{n+2}^3S_{n+3}T_{n+2} + S_n^2S_{n+1}T_{n+3}T_{n+4}^2\right|, \\ b &= \left|S_n^2S_{n+1}T_{n+3}T_{n+4}^2 - T_{n+1}T_{n+2}T_{n+3}S_{n+2}\right|, \\ c &= \left|T_{n+1}T_{n+2}^3T_{n+3}S_{n+2} - S_{n+1}S_{n+2}^3S_{n+3}T_{n+2}\right|, \\ \Delta &= \left|S_nS_{n+1}S_{n+2}^2S_{n+3}S_{n+4}T_nT_{n+1}T_{n+2}^2T_{n+3}T_{n+4}\right|. \end{aligned}$$

例如取 $n = 1$, 代入 $S_1 = 1, S_2 = 1, S_3 = 2, S_4 = 3$ 和 $T_1 = 1, T_2 = -1, T_3 = 1$, 我們便能得到一個邊長爲 $(73, 51, 26)$ 的海倫三角形。這種從數列到幾何對象的反演機制, 展現出一種奇妙的“自相似性”: 通過簡單的遞推規則, 就能構造出具有特殊性質的幾何圖形。這不僅是數論與幾何的交匯點, 也暗示了離散系統中隱藏的深刻數學結構。

更進一步, 索莫斯序列並非孤立存在, 而是嵌入在一個更宏大的離散可積框架之中。我們知道, Somos-4 和 Somos-5 序列實際上是 Hirota-Miwa 方程 (又稱離散 KP 方程) 的特例

$$T_{l+1,m,n}T_{l-1,m,n} = T_{l,m+1,n}T_{l,m-1,n} + T_{l,m,n+1}T_{l,m,n-1}.$$

令人稱奇的是, 通過巧妙的變量選取, 這個三維差分方程竟能“降維” 爲我們熟悉的 Somos 序列。具體而言, 當令 $S_{2l+m} = T_{l,m,n}$ 時, Hirota-Miwa 方程便優雅地退化爲 Somos-4 序列; 而當選取 $S_{\frac{5}{2}l+\frac{3}{2}m+\frac{1}{2}n} = T_{l,m,n}$ 時, 它則化身爲 Somos-5 序列。這種降維過程不僅揭示了索莫斯序列與更廣泛的離散可積系統之間的內在聯繫, 也展現了數學中化繁爲簡、以簡馭繁的魅力。

3.3. QRT 映射: 離散動力系統的守恆之舞

當我們將目光轉向索莫斯序列的內部結構, 一個更加清晰的動力學圖像逐漸浮現出來。通過對索莫斯-5 序列進行變量變換, 我們得到了一個著名的雙有理映射—QRT 映射。

具體而言, 在 Somos-5 序列的遞推關係 (20) 中引入變換:

$$u_n = \frac{S_{n-2}S_{n+1}}{S_{n-1}S_n},$$

我們便能將其轉化爲如下形式的差分方程:

$$u_{n+1}u_{n-1} = 1 + \frac{1}{u_n}. \tag{21}$$

這個看似簡單的非線性方程, 實際上描述了一個二維平面上點的演化規則。如果我們把 $(U, V) = (u_n, u_{n+1})$ 看作平面上的一個點, 那麼每次迭代就相當於這個點按照某種規律跳轉到下一個位

置。這種跳躍不是隨機的, 而是由一個確定的、可逆的變換所控制:

$$\varphi : \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} V \\ U^{-1}(1+V^{-1}) \end{pmatrix}.$$

這類變換被稱爲 QRT 映射 (以 Quispel、Roberts 和 Thompson 三位學者命名), 它雖然形式簡潔, 卻蘊含著深刻的對稱結構和守恆性質。它的每一步變換都可以用有理函數表達, 並且存在一個明確的逆變換, 使得系統可以"倒帶" 回到初始狀態。舉個例子, 如果我們從平面上的一個點 (U,V) 出發, 經過一次 QRT 映射, 會跳到一個新的點 $\left(V, \frac{1}{U}\left(1+\frac{1}{V}\right)\right)$。而如果我們再應用一次逆映射, 就能一步步回到原來的點。這種高度的可逆性, 使得 QRT 映射成爲研究離散動力系統週期行爲的重要工具。

更令人驚歎的是, QRT 映射擁有一個守恆量 $\bar{J}$, 其形式爲:

$$\bar{J} = U + V + \frac{1}{U} + \frac{1}{V} + \frac{1}{UV}.$$

這個量在映射過程中始終保持不變, 意味著系統的演化軌跡始終被限制在一個特定的代數曲線上。這種守恆性不僅賦予了 QRT 映射數學上的美感, 也揭示出它與連續可積系統之間的深刻聯繫。

回顧海倫三角形中的比例不變性和索莫斯序列中的整數性保持機制, 我們可以發現, 它們都體現了某種"不變" 的數學本質。而 QRT 映射則將這些不變性提升到了動力系統的層面: 它不僅保留了結構的完整性, 還展現了離散世界中依然存在的對稱與秩序。

換句話說, QRT 映射就像是一座橋樑, 將數列的遞推結構與幾何的守恆律連接在一起。它讓我們看到, 在看似跳躍的離散演化中, 依然存在著連續可積系統所具有的對稱與不變性。而這, 正是離散可積系統最迷人之處。

4. 算法視角下的可積性

可積性在離散世界中展現出獨特的韻律, 它既非連續理論的簡單移植, 亦非純粹計算的機械堆砌, 而是數學結構與算法邏輯的深度共鳴。從算術幾何平均值的守恆之舞到 QR 算法的拉克斯密碼, 離散可積系統以迭代爲筆、守恆量爲墨, 在算法的網格上勾勒出對稱與穩定的圖景。本節將以三類典型算法爲透鏡, 剖析可積性如何以幾何之形凝練無窮, 以代數之網捕捉混沌, 最終在數值計算的星軌中投射出連續與離散世界的全息交響。

4.1. 算術幾何平均值: 守恆指揮棒下的雙人舞

平均值的智慧, 始於人類丈量世界的本能。古埃及人用穀物堆砌出比例, 古希臘天文學家用星軌測算季節更迭, 文明的晨曦中, 數據的歸約藝術悄然萌芽。從金字塔的斜坡計算到地中海的商貿往來, 數學家們逐漸提煉出"平均" 的概念—將萬千變化凝爲簡潔的數字指紋。

十七世紀, 算術平均值 (Arithmetic Mean) 正式登上舞台, 以優雅的線性公式統領數據王國:

$$\text{算術平均值} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

它如同天平的兩端, 用加法消弭個體波動, 卻在遭遇極端值時顯露脆弱—一粒砂礫足以讓天平傾覆。於是幾何平均值 (Geometric Mean) 攜自然法則而來, 以乘法構築抗擾的堡壘:

$$\text{幾何平均值} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

金融市場的複利增長、生物種群的指數繁衍, 都在它的對數琴絃上奏響樂章。這是屬於比例與率的語言, 用乘積的根號撫平數據的狂躁。

當時間來到 1791 年, 14 歲的高斯 (Gauss) 在草稿紙上畫下兩串數列:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}. \tag{22}$$

算術與幾何平均的交替舞蹈中, 數列如雙螺旋般纏繞收斂, 最終定格於神秘的極限值 $M(a_0, b_0)$ —這便是算術幾何平均值 (Arithmetic-Geometric Mean, AGM) 的誕生。少年高斯敏銳覺察到, 這個看似遊戲的迭代, 竟能破解橢圓積分的百年謎題:

$$I(a_0, b_0) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a_0^2 \cos^2\theta + b_0^2 \sin^2\theta}}.$$

當滿足初始條件 $a_0 > b_0 > 0$ 時, 他證得積分值永恆守恆:

$$I(a_0, b_0) = I(a_1, b_1) = \cdots = I(M(a_0, b_0), M(a_0, b_0)) = \frac{\pi}{2M(a_0, b_0)}.$$

這份沉睡半世紀的數學手稿, 如同封印在羊皮卷中的星圖, 在重見天光的那一刻, 驟然點亮了橢圓函數宇宙的混沌疆域。雅可比沿著高斯的足跡, 將 AGM 鍛造成橢圓函數的萬能鑰匙。而讓現代計算科學家驚歎的是 AGM 中蘊藏的二次收斂奇蹟: 每步迭代精度翻倍, 布倫特-薩拉明算法 (Brent-Salamin Algorithm) 短短 20 次計算即可突破圓周率 π 的百萬位精度。

若我們以動力系統的眼光審視 AGM, 會發現 (22) 實則是一個以橢圓積分 $I(a_n, b_n)$ 爲守恆律的離散可積系統 [13]。這種離散可積性的烙印, 讓 AGM 算法超越了單純的計算技巧, 成爲連接經典數學與現代可積系統的彩虹橋。

4.2. 從實數表示到函數逼近: 在一場優雅的數學之旅中邂逅可積性

人類對精確的追求, 始於指尖的計數, 卻不止於星辰的丈量。當我們用一串數字3.1415926...解開圓周率π的奧秘時, 實際上在進行一場優雅的分解—將混沌的無理數拆解爲10的冪次之和, 就像用音符譜寫樂章。這種十進制的智慧, 在數學的星空中折射出更璀璨的光芒。若將數字中

的10替換爲$(x-a)$, 把每一位的權重化作導數賦予的係數, 便誕生了泰勒展開的魔法:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots.$$

如同用沙粒堆砌金字塔, 泰勒展開以 $(x-a)^n$ 爲磚石, 在函數曲線的局部搭建起多項式的高塔。每一個導數係數都是精妙的榫卯, 讓逼近的精度隨著項數增長而節節攀升。泰勒展開的名字來源於 18 世紀英國數學家泰勒 (Taylor), 他在 1715 年出版的《*Methodus Incrementorum Directa et Inversa*》中首次提出了這一理論。

而數學的想象力從不囿於線性疊加。當人們用連分式

$$\phi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$$

捕捉古希臘黃金分割的永恆之美時, 他們也叩響了另一重維度的大門—函數的連分式展開。這種嵌套的遞歸結構, 恰似俄羅斯套娃般層層遞進:

$$\ln x=\cfrac{x-1}{1+\cfrac{x-1}{2+\cfrac{x-1}{3+\ddots}}}.$$

在這裡, 分子與分母的交響不再依賴冪次的累積, 而是通過分式的自相似性編織出收斂之網。它像一株分形樹, 在複平面的原野上自由生長, 時而繞過泰勒級數無法跨越的極點懸崖, 時而觸及無窮遠處的星光。從歐幾里得《幾何原本》的樸素比例, 到清代《數理精蘊》中的繁分式, 連分式始終是人類解構無限的工具。隨著微積分的創立和分析學的發展, 連分式作爲一種數學工具開始受到重視。英國數學家沃利斯 (Wallis) 在他的著作《Arithmetica Infinitorum》中首次系統地使用了連分式來表示無窮級數。19 世紀末, 挪威數學家蒂爾 (Thiele) 提出了一種用於構造函數連分式展開的方法:

$$f(x+h)=f(x)+\cfrac{h}{\rho_1(x)-\rho_{-1}(x)+\cfrac{h}{\rho_2(x)-\rho_0(x)+\cfrac{h}{\rho_3(x)-\rho_1(x)+\ddots}}},$$

其中連分數係數可通過如下遞推的方式確定

$$\rho_{-1}(x)=0,\quad \rho_0(x)=x,\quad \rho_{n+1}(x)=\rho_{n-1}(x)+\frac{n+1}{\rho_n'(x)},\quad n=0,1,\ldots.$$

而 $\rho_n(x)$ 滿足的這個方程恰恰是一個半離散可積系統, 更確切的說它是沃泰拉 (Volterra) 格子方程和第一類非自治沃泰拉格子方程的組合 [14]。這個遞推公式如同數學 DNA 的雙螺旋, 將動力系統的秩序注入連分式的血脈, 讓非線性波浪在可積的河道中奔湧。

數字的展開是靜止的雕塑, 函數的展開是流動的江河。十進制與泰勒展開共享線性基因, 如同用直線拼接曲線; 連分式則擁抱非線性韻律, 像用漣漪描繪波浪。連分式的每一次摺疊, 都是數學宇宙中守恆律的私語, 最終將混沌編織成可積的紋路。

4.3. QR 算法與戶田方程: 數值算法與可積性的深度糾纏

矩陣特徵值的計算, 是線性代數領域的"基因解碼工程"。上世紀中葉誕生的QR 算法, 正是解開矩陣 DNA 的密鑰—通過優雅的 QR 分解與相似變換, 將任意矩陣逐步雕琢爲三角形態。對於實對稱矩陣來說, 對稱 QR 算法更展現出驚人的效率:

$$\begin{aligned} M_k &= Q_k R_k, \\ R_k Q_k &= M_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

每一次迭代都像精密的機械鐘擺: 先用正交變換將矩陣 M_k 分解爲正交陣 Q_k 與上三角陣 R_k, 再將它們倒序相乘得到新的 M_{k+1}。這個看似簡單的雙人舞, 實則暗藏特徵值守恆的密碼:

$$M_{k+1} = (Q_0 \cdots Q_k)^\top M_0 (Q_0 \cdots Q_k).$$

而當特徵值互異時, 迭代終將收斂爲對角矩陣

$$M_k \to \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad \text{當 } k \to +\infty \text{時}.$$

然而, 這個算法的深刻之處還在於它與固態物理中一維晶體的模型方程即戶田方程有關。戶田晶格由日本著名物理學家戶田盛和 (Morikazu Toda) 在 1967 年提出, 是非線性完全可積系統的最早實例之一[10, 17]。有限維非週期戶田方程的哈密頓 (Hamilton) 形式爲:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}Q_k}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial P_k}, \quad \frac{\mathrm{d}P_k}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial Q_k}, \\ H &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \exp(Q_{k+1} - Q_k), \end{aligned}$$

其中 Q_k 是位置變量, P_k 是動量, 邊界條件爲 $Q_0 \equiv +\infty, Q_{n+1} \equiv -\infty$。若對位置變量 Q_k 關於時間二次求導, 可得到如下的二階常微分方程 :

$$\frac{\mathrm{d}^2 Q_k}{\mathrm{d}t^2} = e^{-(Q_k - Q_{k-1})} - e^{-(Q_{k+1} - Q_k)}, \tag{23}$$

它與下一節要談到的交叉規則有關。而若在哈密頓形式中作變量變換:

$$a_k = P_k, \quad b_k = \exp(\frac{Q_{k+1} - Q_k}{2}),$$

則可得如下的非線性形式

$$\frac{\mathrm{d}a_k}{\mathrm{d}t} = 2(b_k^2 - b_{k-1}^2),$$
$$\frac{\mathrm{d}b_k}{\mathrm{d}t} = b_k(a_{k+1} - a_k),$$

其中 $k = 1, 2, \ldots, n$, 邊界條件 $b_0 = b_n \equiv 0$。通過引入一個對稱三對角矩陣:

$$L(t) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ b_1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix},$$

上述非線性動力學方程實現了化爲矩陣形式的優雅變形:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = [L, L_- - L_+],$$

其中 L_- 和 L_+ 分別是 $L(t)$ 的嚴格下三角和嚴格上三角部分, 拉克斯括號 $[\cdot, \cdot]$ 定義爲 $[L, A] = LA - AL$。矩陣 $L(t)$ 如同動力學系統的全息投影, 被稱爲方程的拉克斯矩陣。

而當我們對矩陣 $\exp(tL(0))$ 進行 QR 分解,

$$\exp(tL(0)) = Q(t)R(t),$$

簡單計算便會發現

$$R(t)Q(t) = \exp(tL(t)).$$

於是, 戶田方程裡的時間參數 t 突然被賦予了迭代的韻律:

$$\exp(L(k)) = Q_k R_k,$$
$$R_k Q_k = \exp(L(k+1)).$$

這恰似撥動了 QR 迭代的時鐘—每個時間單位 $t = 1$ 對應一次完整的 QR 舞步。戶田方程描述的物理演化, 就這樣與 QR 算法的數學迭代合二爲一: 前者是連續時間的動力學詩篇, 後者是離散迭代的數值密碼。

戶田方程的拉克斯矩陣, 特徵值如永恆星座般保持不變; 而 QR 算法的正交相似變換, 同樣守護著矩陣的本質。這種可積性與數值算法的深度糾纏, 揭示了數學結構在連續與離散世界中的全息對應。

5. 幾何對稱與算法捷徑: 調和遞歸的二象性之舞

在幾何世界中, 我們常常發現某種奇妙的對稱性—它不僅體現在圖形的形狀上, 也藏匿於比例與交比之中。例如, 坎迪定理揭示了一條關於弦上點位置的調和關係, 這種關係超越了具體圖形, 在各種圓錐曲線中都能成立。

更令人驚訝的是, 這樣的幾何規律並非孤立存在。當我們把目光轉向數值計算領域, 會發現一類被稱爲“交叉規則” 的算法公式, 竟然與這些幾何定理驚人地相似。它們不僅能大幅提高計算效率, 還與物理中的可積系統有著深刻的聯繫。

本章將帶你在幾何與算法之間穿行, 從蝴蝶振翅般的坎迪定理出發, 穿越交叉規則構建的數字迷宮, 最終抵達一個統一的數學圖景: 在離散世界的深處, 幾何的對稱性依然鮮活, 而算法的節奏則悄然應和著宇宙的秩序。

5.1. 坎迪定理: 幾何中的調和對稱

在射影幾何的世界中, 有一種令人著迷的現象: 某些幾何關係並不依賴於圖形的具體形狀, 而是由點與線之間的位置關係所決定。這類性質通常具有高度的對稱性, 且在不同的圓錐曲線之間保持不變。坎迪定理就是這樣一個典型例子, 它揭示了弦上點之間的調和共軛關係, 並展現了離散可積系統中幾何結構的深層規律。

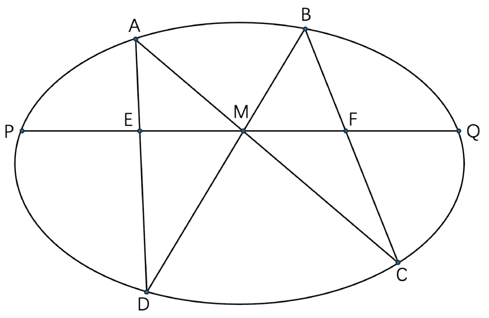


圖 2: 橢圓曲線上的坎迪定理

設點 M 爲圓錐曲線內任意一點, 過該點分別作三條弦 PQ, AC 和 BD (如圖 2 所示), 若將線段 MP、MQ、ME、MF 視爲有向長度, 則坎迪定理可表述爲:

$$\frac{1}{ME}+\frac{1}{MF}=\frac{1}{MP}+\frac{1}{MQ}.$$

此等式揭示了四個點 E、F、P、Q 在弦 PQ 上滿足的調和關係。這種關係不僅不依賴於圓錐曲線的具體類型, 也不受點 M 位置的影響, 體現出一種深層次的幾何不變性。

當圓錐曲線退化爲圓, 且 M 爲 PQ 的中點時, 坎迪定理退化爲經典的蝴蝶定理 [15]。此

時由 $|MP|=|MQ|$, 原式化簡爲 $\frac{1}{|ME|}+\frac{1}{|MF|}=\frac{2}{|MP|}$, 結合圓的對稱性 (如弦心距定理), 可進一步推出 $|ME|=|MF|$, 即 M 是 EF 的中點。

"蝴蝶定理" 因圓內構型的對稱之美而得名, 而"坎迪定理" 則是其在更廣泛圓錐曲線上的延伸。二者都揭示了弦上點的對稱關係。但核心差異顯著: 蝴蝶定理強調中點對稱性, 而坎迪定理的深層邏輯植根於調和共軛點的理論。若將點 M 視爲透視中心, 則直線 ME 與 MF 可視爲對弦 PQ 的調和分割。從表面上看, 這似乎只是一個幾何命題, 但它背後隱藏的結構遠比想象中深遠。事實上, 這種調和關係不僅存在於幾何世界, 也在數值算法中找到了它的"孿生兄弟" —交叉規則。接下來的小節中, 我們將看到, 這些看似無關的數學對象, 是如何在離散可積系統的框架下緊密相連的。

5.2. 交叉規則: 算法中的遞推魔法

在數學的宇宙中, 有一種神奇的"捷徑" —它能讓複雜的序列加速收斂, 甚至能揭示物理系統背後的深層規律, 這就是交叉規則。

想象你在迷宮中尋找出口, 每一步都要反覆試探方向; 而交叉規則就像一條隱藏通道, 讓你跳過冗餘步驟, 直達目標。這種"跳步" 的思想, 正是許多現代加速算法的核心理念之一。它不僅大幅提升了數值計算的效率, 還在更深層次上與幾何和物理系統建立了深刻聯繫。以 ε-算法爲例, 它的交叉規則形式如下:

$$\frac{1}{\varepsilon_{2k+2}^{(n)}-\varepsilon_{2k}^{(n+1)}}+\frac{1}{\varepsilon_{2k-2}^{(n+2)}-\varepsilon_{2k}^{(n+1)}}=\frac{1}{\varepsilon_{2k}^{(n)}-\varepsilon_{2k}^{(n+1)}}+\frac{1}{\varepsilon_{2k}^{(n+2)}-\varepsilon_{2k}^{(n+1)}}. \tag{24}$$

這個公式看起來複雜, 但它背後的思想卻非常直觀: 通過巧妙地組合不同層級的信息, 直接構造出更高階的近似值, 從而跳過大量中間計算。這種"跳過中間變量、直接構建高階項" 的策略顯著降低了計算複雜度, 彷彿在數字迷宮中找到了最優路徑。

有趣的是, 這些看似只是用於加速計算的交叉規則, 有時竟然能"跳" 出數學世界, 直接走進物理領域。比如合流 QD 算法的交叉規則, 實際上就對應著大名鼎鼎的戶田方程 (23), 一個在物理學中廣泛應用的可積方程。

交叉規則的雙重身份令人驚歎: 在數值領域, 它是優化計算的"瑞士軍刀" , 避免冗餘計算, 提升效率; 在物理領域, 它是可積系統的"密碼本" , 通過算法規則揭示方程的深層對稱性。它像一位穿梭於數值與物理之間的使者, 提醒我們: 最優雅的算法, 往往藏有宇宙的密碼。下次當你使用外推法加速計算時, 不妨想一想—你或許正在不經意間, 觸碰到了描述孤立子或粒子振動的方程。

5.3. 幾何與算法的和鳴: 離散世界的對稱投影

在圓錐曲線的世界裡, 弦與點的關係遠不止圖形上的連接那麼簡單。它們之間的交比、調

和共軛等性質, 構成了一種超越具體形狀的幾何結構。而在上一節中我們看到, 這種結構竟然也能在數值計算的交叉規則中找到“鏡像” —彷彿數學的不同分支在某個深處交匯, 奏響了統一的旋律。這並非巧合。事實上, 許多交叉規則都可以從幾何定理中推導出來, 而温恩 (Wynn) 遞推式就是其中最具代表性的例子之一。

如圖 2 所示, 設平面圓錐曲線 $\Gamma: ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$ 與 x 軸相交於點 $P(r_{m-1,n},0)$ 和點 $Q(r_{m+1,n},0)$, 在這條弦上取任意一點 $M(r_{m,n},0)$, 它成爲幾何構造的關鍵樞紐。如果我們固定縱向位置 n, 並沿 x 軸滑動弦的位置, 就會發現端點 P 和 Q 的橫座標 $r_{m-1,n}$ 與 $r_{m+1,n}$ 形成某種規律性的序列。這個橫向指標 m 就像是數列的索引, 標記著不同水平位置的狀態變化。由此定義的橫向映射 ϕ_1, 將相鄰端點之間的幾何關係轉化爲代數遞推公式:

$$r_{m-1,n}+r_{m+1,n}=-\frac{d}{a},\quad r_{m-1,n}\cdot r_{m+1,n}=\frac{f}{a}.$$

而當我們考慮過點 M 的動弦旋轉時, 另一個方向上的自由度也隨之浮現。保持 $r_{m,n}$ 不變, 讓弦繞該點旋轉, 會得到新的交點 A,B,C,D, 這些點隨斜率變化在曲線上“舞動”。連接這些點形成的新弦 AD 與 BC, 與 x 軸的交點 $E(r_{m,n-1},0)$ 和 $F(r_{m,n+1},0)$ 則記錄了旋轉角度的離散狀態。此時, 縱向指標 n 成爲旋轉次數的計數器, 縱向映射 ϕ_2 將射影變換凝結爲參數更新規則。

當橫向滑動與縱向旋轉交織在一起, 一個二維的參數網格 $\{r_{m,n}\}$ 自然浮現。每個點 (m,n) 都對應唯一的幾何狀態: m 標記水平方向的位置演化, n 記錄垂直方向的旋轉相位。這種參數化方式, 使得連續的幾何操作被“離散化”, 變成了格點間的躍遷。

更令人驚歎的是, 坎迪定理中的調和關係, 在此框架下也找到了它的數字孿生體。三點組 $\{P,M,Q\}$ 與 $\{E,M,F\}$ 的交比守恆性, 通過倒數運算轉化爲如下形式:

$$\frac{1}{r_{m-1,n}-r_{m,n}}+\frac{1}{r_{m+1,n}-r_{m,n}}=\frac{1}{r_{m,n-1}-r_{m,n}}+\frac{1}{r_{m,n+1}-r_{m,n}}. \tag{25}$$

這就是著名的温恩遞推式, 該關係最早由温恩 [9] 通過 B 算法及其與帕德逼近的聯繫所建立。該恆等式也被稱爲“弗羅貝尼烏斯缺失恆等式 (Missing Identity of Frobenius)”, 其結論對於參數 n 的正負取值均成立。事實上, 文獻 [11] 已通過迪沙格 (Desargues) 定理與仿射幾何的理論框架, 爲温恩遞推公式提供了完整的幾何詮釋, 然而本研究爲增強幾何直觀性, 特別選用經典射影幾何中的坎迪定理來構建對應關係—這種處理方式在保持數學嚴謹性的同時, 能更清晰地揭示算法背後的幾何本質。交叉規則中典型的參數遞推方程 (24) 與坎迪定理導出的幾何約束 (25) 呈現完美的代數同構。指標 m,n 在此獲得雙重詮釋—既是幾何構造的位置座標, 又是離散系統中的狀態標籤。這種對稱結構恰與交叉規則中的遞推公式共鳴, 揭示離散格點系統本質上是射影不變性的參數化投影。

數學的深邃在於, 它總能在迥異的領域識別相同的基因序列。坎迪定理與交叉規則的聯繫,

恰如幾何與代數、離散與連續、直覺與抽象之間的一場隱密對話。當我們在參數網格 $r_{m,n}$ 上追蹤指標的躍遷, 實際上正在破譯宇宙對稱性書寫在圓錐曲線上的統一密碼—這是數學給予求真者最優雅的啓示錄。

6. 幾何閉合與物理週期: 彭賽列定理與離散單擺的時空共鳴

在離散可積系統的研究中, 最令人驚歎的現象之一是: 不同數學語言可以描述同一本質規律。無論是幾何中的閉合路徑、分析中的橢圓函數, 還是物理中的週期運動, 它們都指向一種超越形式的統一結構。

本章將帶你走進一個美妙的世界—在這裡, 彭賽列多邊形的閉合之美、雅可比橢圓函數的解析週期, 以及廣田離散單擺的動力學守恆, 共同譜寫出一曲關於對稱與週期的交響樂。它們告訴我們: 離散世界的週期律, 並非隨機巧合, 而是連續對稱在離散時空中的精確投影 。

6.1. 雅可比的雙圓模型: 幾何閉合的解析密碼

在離散可積系統的研究中, 一個令人著迷的現象是: 某些看似孤立的數學結構, 實際上揭示了跨越幾何、代數與動力系統的統一規律。而彭賽列定理正是這樣一個典型例子—它不僅是一個關於多邊形閉合的幾何命題, 更是一種深刻體現不變性與週期性的數學現象。

在 19 世紀初, 法國數學家彭賽列提出了一個深刻而優雅的幾何定理: 如圖 3 所示, 給定平面上的兩個圓錐曲線 O 和 M, 若從 O 上任一點 P_0 出發, 作 M 的切線交 O 於新點 P_1, 再以 P_1 為起點重複此過程生成點列 P_n, 當存在某個整數 $N \geq 3$ 使得 $P_N = P_0$ 時, 閉合性對所有初始點 P_0 成立。

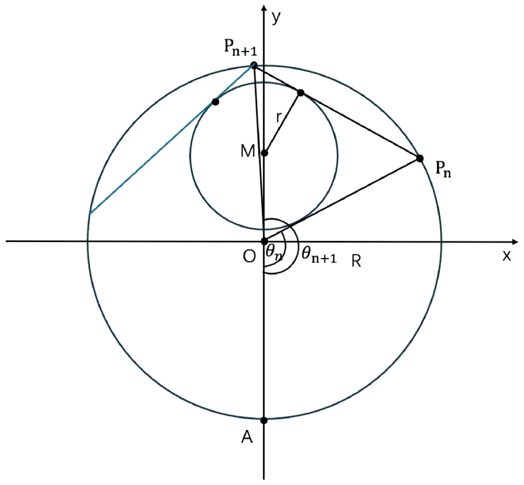


圖 3: 雅可比雙圓模型

爲了深入理解這一結構, 德國數學家雅可比提出了一種簡化模型: 將一般圓錐曲線通過射影變換轉化爲雙圓系統。設外圓 O 的方程爲 $x^2 + y^2 = R^2$, 內圓 M 的方程爲 $x^2 + (y-a)^2 = r^2$, 其中心在 y-軸上相距 a, 且滿足 $a + r < R$。從外圓上的點 $P_n(\theta_n) = \big(R\cos(\theta_n - \frac{\pi}{2}), R\sin(\theta_n - \frac{\pi}{2})\big)$ 出發, 作內圓的切線交外圓於 $P_{n+1}(\theta_{n+1})$, 依此類推生成角度序列 $\{\theta_n\}$。

通過幾何分析, 雅可比導出了相鄰角度的守恆方程:

$$R\cos\left(\frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{2}\right) + a\cos\left(\frac{\theta_{n+1} + \theta_n}{2}\right) = r.$$

這一方程本質是切線段長度與兩圓相對位置的幾何約束。進一步, 該守恆量可轉化爲二階非線性差分方程:

$$R\sin\left(\frac{\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n}{4}\right) = -a\sin\left(\frac{\theta_{n+1} + \theta_{n-1} + 2\theta_n}{4}\right), \tag{26}$$

其解可由雅可比橢圓函數顯式給出:

$$\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = cn(qn + \phi; k), \quad \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = sn(qn + \phi; k),$$

其中橢圓模數k 與步長q 由幾何參數嚴格定義:

$$k^2 = \frac{4aR}{(R+a)^2 - r^2}, \quad cn(q;k) = \frac{r}{R+a}, \quad dn(q;k) = \frac{R-a}{R+a},$$

當累積相位 qn 達到橢圓積分週期 $2K(k)$ 的整數倍時 (即滿足 $qN = 2K(k)M$, 其中 $K(k)$ 爲第一類完全橢圓積分), 角度序列 θ_n 精確迴歸初始值, 從而形成閉合 N 邊形軌跡, 完美對應了彭賽列定理的普適閉合性, 揭示了幾何約束的剛性。

6.2. 廣田離散單擺: 動力學視角下的可積投影

在前一節中, 我們看到雅可比如何用橢圓函數解析地揭示彭賽列定理背後的週期結構。這不僅是一個幾何命題, 更是一種跨越空間與時間、圖形與公式、連續與離散的統一現象。但這個故事並沒有結束。事實上, 這種週期性結構也出現在物理世界中—它以一種令人驚訝的方式, 走進了經典力學的核心領域: 單擺模型 。

單擺是一種經典的物理模型 (如圖 4), 由一端固定、不可伸長的輕繩和另一端懸掛的小球構成。當小球偏離平衡位置後釋放, 會在重力作用下來回擺動。在擺角較小時, 這種運動可近似爲簡諧振動, 其週期僅依賴於擺長和重力加速度。具體來說, 經典單擺的連續運動方程爲:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 \sin\theta, \tag{27}$$

其中 θ 是擺錘相對於垂直方向的擺角, $\omega = (g/l)^{1/2}$ 是系統的固有頻率, l 是數學擺的長度, g 是重力加速度。這個方程描述的是連續時間下的運動規律。但在許多實際應用中, 我們需要將它“離散化” —也就是用差分代替微分, 來模擬或計算系統的演化。

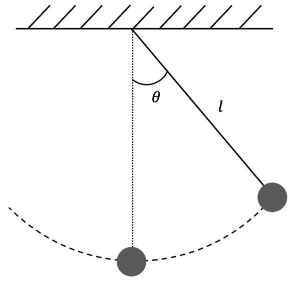


圖 4: 單擺模型

單擺方程 (27) 的優雅不僅在於它描述了鐘擺的週期性, 更在於它屬於“可積系統” 這一數學貴族: 存在足夠多的守恆量把相空間切成一維不變環面, 使運動可以被橢圓函數完全參數化。1971 年, 廣田良吾給出了一個堪稱魔術的觀察: 只要換到一組新的因變量—今天被稱爲 τ 函數, 所有孤子方程的多孤子解都可以寫成有限個指數之和。τ 函數並非技巧性的“換元”, 它揭示了一條系統化的道路: 任何可積 (連續) 方程, 都有與之相容的離散版本, 且二者共享同樣的 τ 函數與代數結構。這條綱領在 1980 年代被日本“京都學派” 進一步提煉爲無窮維李代數表示理論的幾何圖像: τ 函數其實是某個最高權表示的真空期望值, 而離散方程正是該代數在格點上的“轉移矩陣” 恆等式。於是, “離散化” 不再是粗糙的差商逼近, 而是代數結構的忠實投影。

在這一綱領下, 廣田在 1982 年提出了一種離散時間單擺模型, 將連續方程 (27) 離散化爲非線性差分方程 [12]:

$$\sin\left(\frac{\theta_{n+1}+\theta_{n-1}-2\theta_n}{4}\right) = -\omega^2\delta^2\sin\left(\frac{\theta_{n+1}+\theta_{n-1}+2\theta_n}{4}\right), \tag{28}$$

其中 δ 是離散時間步長, 當 $\delta \to 0$ 時, 離散時間單擺模型 (28) 轉化爲連續單擺模型 (27)。通過觀察, 我們可以發現, 離散時間單擺模型 (28) 和雅可比雙圓模型 (26) 結構是一致的。乍看之下, 這個差分方程似乎只是對原方程的一種數值逼近。但事實遠不止如此—如果我們定義: $\theta_n = \theta(t+2\delta n)$, 其中 δ 爲離散時間步長。通過參數替換 $\frac{a}{R} = \omega^2\delta^2$, 那麼, 這個離散單擺模型竟然嚴格等價於前面介紹的雅可比雙圓模型所導出的守恆方程 (26)!

這種深刻的對應關係並非偶然, 而是揭示了離散可積系統的核心本質。廣田離散單擺不僅是對連續運動的近似, 更是可積結構在離散時空中的精確體現; 它不僅是一種數值方法, 更是一個保持守恆律與週期性的動力系統。通過它, 我們得以從物理視角重新理解彭賽列定理: 那看似靜止的幾何閉合路徑, 實際上可以被看作是某種理想化“擺動” 過程的映射—幾何與動力學, 在此交匯爲一。

致謝: 感謝審稿人的認真審閱和寶貴建議, 這些意見對本研究工作的完善頗有裨益。感謝王寶教授對研究內容的無私幫助。本研究工作得到國家自然科學基金 (基金號: 12426622, 12071447, 12171475, 11971322) 和北京市自然科學基金 (基金號: 1252012) 的資助。謹以此文獻給首都師範大學吳可教授, 祝賀他八十壽辰!

參考文獻

1. N.J. Hitchin, G.B. Segal, N.M.J. Woodhouse, and R.S. Ward, *Integrable Systems: Twistors, Loop Groups, and Riemann Surfaces.* Oxford Graduate Texts in Mathematics. Clarendon Press, 1999.
2. B.G. Konopelchenko and W.K. Schief, Menelaus' theorem, Clifford configurations and inversive geometry of the Schwarzian KP hierarchy. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35(29), 6125, 2002.
3. W.K. Schief, Lattice geometry of the discrete Darboux, KP, BKP and CKP equations. Menelaus' and Carnot's theorems. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 10(Suppl 2), 194-208, 2003.
4. D. Pedoe, *A Course of Geometry for Colleges and Universities.* Cambridge University Press, 1970.
5. K.Witczyński, On some generalization of the Menelaus' theorem. *Zeszyty Nauk. Geom*, 21, 109-111, 1995.
6. 劉毅。梅涅勞斯定理與塞瓦定理。長春出版社, 1997年10月。
7. 邊欣。Heron 三角形的一般表達式及其應用 [J]。數學通訊, 2011 (2下半月教師), 42-44。
8. A.N.W. Hone, Heron triangles and the hunt for unicorns, *The Mathematical Intelligencer*, 46(4), 372-377, 2024.
9. P. Wynn, Upon systems of recursions which obtain among the quotients of the Padé table. *Numerische Mathematik*, 8, 264-269, 1966.
10. M. Toda, *Theory of nonlinear lattices*, volume 20. Springer Science & Business Media, 2012.
11. A. Doliwa and A. Siemaszko, Integrability and geometry of the Wynn recurrence. *Numerical Algorithms*, 92(1), 571-596, 2023.
12. Y. Minesaki and Y. Nakamura, On an integrable discretization of integrable systems with a separatrix. *Physics Letters A*, 250(4-6), 300-310, 1998.
13. Y. Nakamura, Algorithms associated with arithmetic, geometric and harmonic means and integrable systems. *Journal of computational and applied mathematics*, 131(1-2), 161-174, 2001.
14. C. Brezinski, *History of continued fractions and Padé approximants*, volume 12. Springer Science & Business Media, 2012.
15. 辛佳佑, 廖昱喆, 陳威廷, 楊玉星。四邊形的蝴蝶定理。數學傳播季刊, 49(1), 69-79, 2025。
16. W.W. Symes, The QR algorithm and scattering for the finite nonperiodic Toda lattice. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 4(2), 275-280, 1982.
17. 費朗克斯等。數學物理學百科全書3: 可積系統; 經典, 共形與拓樸場論。科學出版社, 2008。

—本文作者伍靜蕊就讀中國科學院大學, 中國科學院數學與系統科學研究院, 李春霞任教首都師範大學數學科學學院, 孫建青任教中國海洋大學數學科學學院, 胡星標任教中國科學院大學, 中國科學院數學與系統科學研究院—